ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

HOÀNG THỊ LUYẾN

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ, GIỎI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2021

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

HOÀNG THỊ LUYẾN

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ, GIỎI

Chuyên ngành:	**Phương pháp toán sơ cấp**
Mã số:	**8 46 01 13**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS TRỊNH THANH HẢI

Thái Nguyên - 2021

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Trịnh Thanh Hải. Tác giả xin trân trọng bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới thầy, Người đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn, động viên khích lệ và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiện cứu luận văn.

Qua bản luận văn này, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới Ban Giám hiệu trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán - Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy và tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu trong suốt thời gian qua.

Tác giả cũng xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và tất cả mọi người đã quan tâm, động viên và giúp đỡ để tác giả có thể hoàn thành luận văn của mình.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 01 năm 2021

Tác giả luận văn

Hoàng Thị Luyến

Mở đầu

Trong chương trình Toán phổ thông, Tổ hợp là một trong những nội dung quan trọng luôn xuất hiện trong các đề thi THPT Quốc gia, trên các tạp chí toán học, blog toán học, trong các đề thi học sinh giỏi hay kì thi Olympic. Tổ hợp luôn được đánh giá là một nội dung tương đối khó. Các bài toán tổ hợp thường đòi hỏi học sinh hiểu chính xác những mối quan hệ giữa các đối tượng được xét mà đôi khi bằng ngôn ngữ cũng khó diễn đạt một cách đầy đủ. Các bài toán về Tổ hợp mặc dù đã được nghiên cứu từ rất lâu nhưng đến hiện nay vẫn luôn có sức hấp dẫn, là niềm đam mê của nhiều nhà toán học trên thế giới, thu hút được sự yêu thích của các thầy cô dạy toán và học sinh.

Trong môn Đại số và giải tích, các dạng bài tập liên quan đến Tổ hợp luôn là các bài tập thú vị nhưng thường khá phức tạp. Đặc biệt là những bài toán, đề thi dành cho học sinh giỏi thì học sinh phải nắm được các kiến thức nâng cao, đây là các phương pháp giải nâng cao không có trong chương trình đại trà cũng như chương trình nâng cao ở bậc phổ thông.

Xuất phát từ thực tế trên, với mong muốn đưa ra một số bài toán Tổ hợp dành cho học sinh khá, giỏi và lời giải của chúng dựa trên các kiến thức nâng cao chưa được trình bày tường minh trong SGK phổ thông, tác giả đã lựa chọn đề tài **"Một số bài toán Tổ hợp dành cho học sinh khá, giỏi"** làm hướng nghiên cứu cho luận văn của mình.

Mục đích của luận văn là tìm hiểu và trình bày cách giải một số bài toán Tổ hợp dành cho học sinh khá, giỏi. Luận văn có nhiệm vụ: Tập hợp và đọc hiểu các tính chất, các nguyên lý, các phương pháp thường được vận dụng để giải quyết các bài toán tổ hợp nói chung, một số bài toán tổ hợp dành cho học sinh khá, giỏi nói riêng; Sưu tầm một số bài toán Tổ hợp trong các đề thi tuyển sinh Đại học, Cao Đẳng; đề thi THPT Quốc Gia; đề thi chọn học sinh giỏi trong nước. Sau đó đưa ra lời giải các bài toán đó.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo luận văn được trình bày trong hai chương:

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn trình bày một số tính chất, các nguyên lý, các phương pháp thường được vận dụng để giải quyết các bài toán tổ hợp nói chung, một số bài toán tổ hợp dành cho học sinh khá, giỏi nói riêng như: quy tắc cộng, quy tắc nhân, nguyên lý bao hàm và loại trừ, nguyên lý chim bồ câu, định lý Ramsey, tổ hợp lặp, bài toán chia kẹo của Euler,. . . . Các nội dung này được vận dụng để giải quyết các bài toán được trình bày trong Chương 2.

Chương 2. Một số bài toán tổ hợp dành cho học sinh khá, giỏi

Trong chương 2, luận văn sẽ trình bày lời giải một số bài tập tổ hợp khó, dành cho học sinh khá giỏi được phân theo các chủ đề, gắn với cơ sở của lời giải.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Quy tắc cộng, quy tắc nhân

1.1.1 Quy tắc cộng

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Có n cách thực hiện phương án A và có m cách thực hiện phương án B. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $m + n$ cách.

Quy tắc cộng cho công việc có thể được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Có n_1 cách thực hiện phương án A_1, có n_2 cách thực hiện phương án A_2,... và n_k cách thực hiện phương án A_k. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ cách.

Chú ý 1.1.1. Quy tắc cộng có thể được phát biểu dưới dạng sau: Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn không giao nhau thì số phần tử của $A \cup B$ bằng số phần tử của A cộng với số phần tử của B, tức là

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

1.1.2 Quy tắc nhân

Giả sử một công việc nào đó bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể làm theo n cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn A thì công đoạn B có thể làm theo m cách. Khi đó công việc có thể được thực hiện theo nm cách.

Quy tắc nhân cho công việc với nhiều công đoạn được phát biểu như sau: Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Công đoạn A_1 có thể được thực hiện theo n_1 cách, công đoạn A_2 có thể thực hiện theo n_2 cách,

$\ldots$, công đoạn A_k có thể được thực hiện theo n_k cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n_1 n_2 \cdots n_k$ cách.

1.2 Nguyên lý bù trừ

1.2.1 Nguyên lý bù trừ cho hai tập hợp

Số các phần tử trong hợp hai tập A và B bằng tổng các phần tử của mỗi tập trừ đi số phần tử của giao hai tập hợp, tức là

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Nếu A là một tập trong X, phần bù của A trong X kí hiệu là $\overline{A}$. Nếu A, B là hai tập trong X thì

$$|\overline{A \cup B}| = |X| - |A \cup B| = |X| - (|A| + |B|) + |A \cap B|.$$

Nhưng $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, vì vậy

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |X| - |A \cup B| = |X| - (|A| + |B|) + |A \cap B|.$$

1.2.2 Nguyên lý bù trừ cho ba tập hợp

Với ba tập A, B, C thì

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

Cho tập hợp A và các tập con $A_1, A_2, A_3 \subset A$. Khi đó

$$\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right| = |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Nguyên lý bao hàm và loại trừ dạng tổng quát:

$$\begin{aligned}|X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n| = &\sum_{1 \le i_1 \le n} |X_{i_1}| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |X_{i_1} \cap X_{i_2}| + \cdots \\ &+ (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le n} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_n}| + \cdots \\ &+ (-1)^{n+1} |X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n|.\end{aligned}$$

Hay

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} X(n, k),$$

trong đó

$$X(k,n) = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \cdots \cap X_{i_k}|.$$

Trong tổng $X(n,k)$ bộ $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ lấy tất cả các tổ hợp chập k của n và như vậy $X(n,k)$ là tổng của C_n^k số hạng. Nói riêng ta có

$$X(n,1) = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$$

và

$$X(n,n) = |X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n|.$$

1.3 Nguyên lý chim bồ câu, định lý Ramsey

1.3.1 Nguyên lý chim bồ câu

Giả sử dùng r chiếc lồng để nhốt tất cả $n+1$ con chim Bồ câu với $n \ge r$. Khi đó có chiếc lồng phải nhốt ít nhất $\left[\dfrac{n}{r}\right] + 1$ con chim ($[x]$ là phần nguyên của số thực x).

Chứng minh. Giả sử không có một chiếc lồng nào nhốt nhiều hơn hoặc bằng $\left[\dfrac{n}{r}\right] + 1$ con chim, có nghĩa mỗi lồng nhốt nhiều nhất là $\left[\dfrac{n}{r}\right]$ con chim. Vì $\left[\dfrac{n}{r}\right] \le \dfrac{n}{r}$ nên $r \cdot \left[\dfrac{n}{r}\right] \le r \cdot \dfrac{n}{r} = n < n+1$. Khi đó tổng số chim được nhốt hết trong r lồng nhiều nhất là $n < n+1$ con chim, mâu thuẫn. □

Ví dụ 1.3.1.

(i) Trong bất kỳ một nhóm 367 người thế nào cũng có ít nhất hai người có ngày sinh nhật giống nhau bởi vì chỉ có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau.

(ii) Trong kỳ thi học sinh giỏi, điểm bài thi được đánh giá bởi một số nguyên trong khoảng từ 0 đến 10. Theo nguyên lý chim bồ câu, trong số 12 học sinh chắc chắn tìm được hai học sinh có kết quả thi như nhau

Nhận xét 1.3.2. Nguyên lý này được vận dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau để chỉ ra sự tồn tại một đối tượng với tính chất nào đó. Cái khó của việc vận dụng nguyên lý này là trong bài toán đang xét thì cái gì được coi là lồng và cái gì được coi là chim bồ câu.